Enseignant: Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
16 juin 2022
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 4 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to ((5\alpha - \alpha^2)x + (\alpha - 2)y + 7z, (\alpha^2 + \alpha)y + (\alpha + 1)z, (-\alpha^2 - 3\alpha)z).$$

Pour combien de valeur(s) de α est-ce que ...

Question 1 *(3 points)* ... f n'est pas diagonalisable ?

- [ ] 3
- [ ] 0
- [x] 2
- [ ] 1

Question 2 *(2 points)* ... f n'est pas diagonalisable par blocs ?

- [ ] 2
- [x] 1
- [ ] 3
- [ ] 0

Enoncé

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4 on donne :

$$V = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P'(-1) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de V. On note $\deg P(X)$ le degré du polynôme $P(X)$.

Question 3 *(2 points)* Le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$W = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, \deg P(X) \leqslant 2 \text{ et } P(X)^2 \in V\} \ldots$$

- [x] ... est stable par multiplication scalaire mais pas par addition
- [ ] ... n'est stable ni par multiplication scalaire ni par addition
- [ ] ... est stable par addition et par multiplication scalaire
- [ ] ... est stable par addition mais pas par multiplication scalaire

Question 4 *(2 points)* Parmi les familles de polynômes suivantes, laquelle est génératrice de V ?

- [ ] $(X^2-1)(X+1), (X+1)^2, X^3 - X^2 - 5X - 3, (X+1)^3, (X+1)^4$
- [ ] $1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3, (X+1)^4$
- [ ] $1, X, X^2, X^3, X^4$
- [x] $X^2 + 2X, X^3 - 3X - 2, (X+1)^2, (X+1)^3, X^4 + 4X + 3$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

On considére la projection:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

sur le plan vectoriel d'équation $x - y + 3z = 0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$.

(a) Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

(b) Trouver l'équation d'un plan vectoriel contenant $(3, -1, 4)$ et qui est stable par f .

Solution

(a) La matrice de f en base canonique est :

$$A = I_3 - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2&6\\1&-1&3\\1&-1&3\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&-6\\-1&5&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

L'expression pour f est donc:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4}(2x + 2y - 6z, -x + 5y - 3z, -x + y + z).$$

(b) Si un plan est stable par f et contient $(3, -1, 4)$ il doit aussi contenir :

$$f(3, -1, 4) = (-5, -5, 0) = -5(1, 1, 0).$$

Introduisons alors le plan vectoriel V engendré par $(3, -1, 4)$ et $(1, 1, 0)$, c'est-à-dire celui d'équation :

$$\begin{vmatrix}x&3&1\\y&-1&1\\z&4&0\end{vmatrix} = -4x + 4y + 4z = 0 \text{ ou encore } x - y - z = 0.$$

Il contient bien $(3, -1, 4)$ et il est stable par f, comme on peut le vérifier en calculant:

$${}^tA\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&5&1\\-6&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Question 6: *Cette question est notée sur 8 points.*

0 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6 .5 7 .5 8 .5

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to (7x - 3y + 6z, 36x - 14y + 24z, 9x - 3y + 4z).$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de f et le factoriser.

(b) f est-elle diagonalisable? Si oui, déterminer une base propre pour f.

(c) Représenter sur un croquis ci-dessous les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Solution Notons:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 6 \\ 36 & -14 & 24 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans la base canonique.

(a) Calculons le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{vmatrix} 7-X & -3 & 6 \\ 36 & -14-X & 24 \\ 9 & -3 & 4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-X & -3 & 6 \\ 36 & -14-X & 24 \\ X+2 & 0 & -2-X \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} 7-X & -3 & 6 \\ 36 & -14-X & 24 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = (X+2)\begin{vmatrix} 7-X & -3 & 13-X \\ 36 & -14-X & 60 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} -3 & 13-X \\ -14-X & 60 \end{vmatrix} = (X+2)(-180+(14+X)(13-X)) = \cdots$$

$$\cdots = (X+2)(2-X-X^2) = (1-X)(2+X)^2.$$

(b) L'application linéaire f possède deux valeurs propres distinctes: -2 (de multiplicité algébrique 2) et 1 (de multiplicité algébrique et donc aussi géométrique égale à 1). Cherchons à présent les vecteurs propres. Pour cela, écrivons les deux matrices:

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 36 & -12 & 24 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 36 & -15 & 24 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La première est de rang 1, et au vu de la décomposition colonne-ligne que l'on a écrite, on peut affirmer que:

$$\operatorname{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) : 3x - y + 2z = 0.$$

La seconde matrice ci-dessus est de rang 2. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système:

$$\begin{cases} 6x - 3y + 6z = 0 \\ 36x - 15y + 24z = 0 \\ 9x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 3y - 12z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = z(1, 4, 1).$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle engendrée par $(1, 4, 1)$. Posons alors:

$$\mathcal{B} = (1, 3, 0),\ (0, 2, 1),\ (1, 4, 1).$$

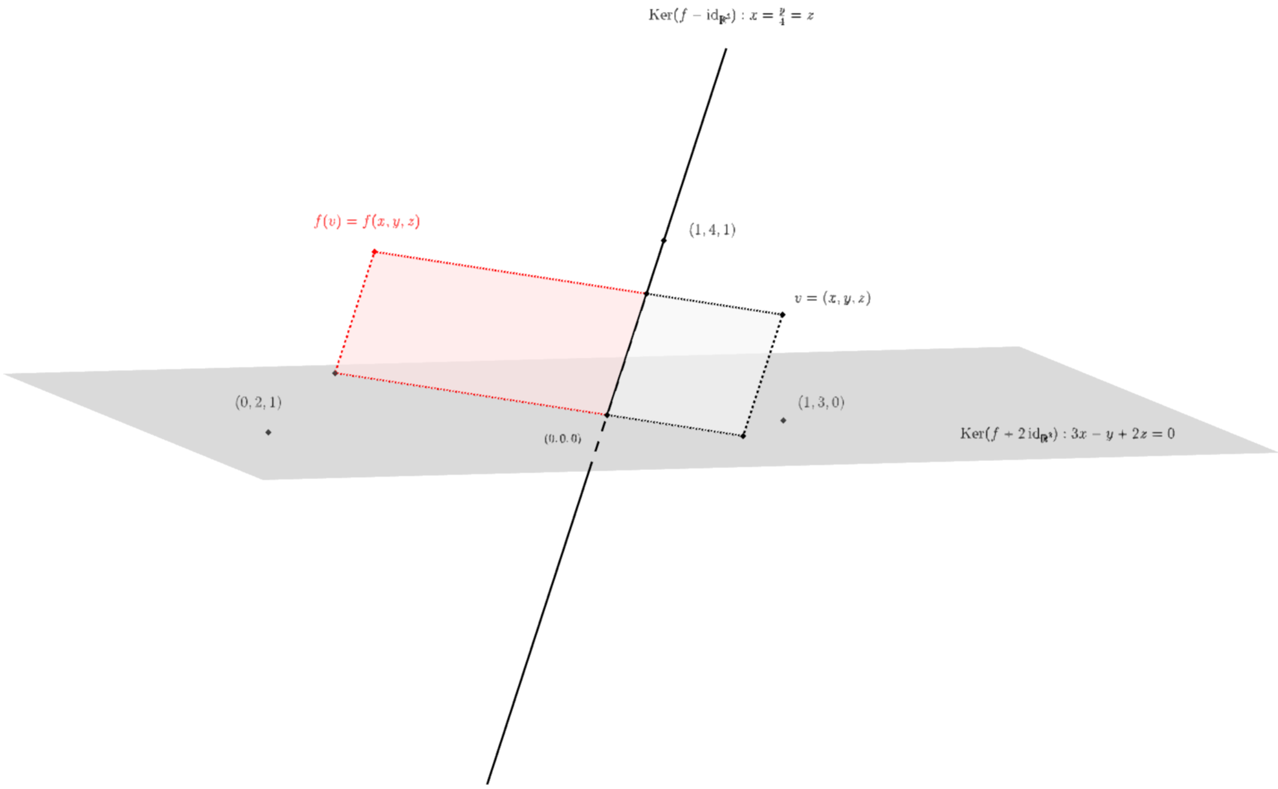
La famille $\mathcal{B}$ est une base propre pour f. On a:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Vue en base $\mathcal{B}$, l'application f a pour expression :

$$\begin{cases} t_1' = -2t_1 \\ t_2' = -2t_2 \\ t_3' = t_3 \end{cases}$$

Pour passer de $v = (x, y, z)$ à son image $f(v) = f(x, y, z)$ par f, on peut donc imaginer que l'on "casse" v selon les deux sous-espaces propres : la composante selon le sous-espace $\operatorname{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est multipliée par -2, et celle selon le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est fixée. On obtient le dessin suivant :


$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) : x = \frac{y}{4} = z$
$f(v) = f(x, y, z)$
$(1, 4, 1)$
$v = (x, y, z)$
$(0, 2, 1)$
$(1, 3, 0)$
$(0, 0, 0)$
$\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) : 3x - y + 2z = 0$

Question 7: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ on donne :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \sin(x^4), \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \sin(4x), \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to (\sin(x))^4.$$

La famille f, g, h est-elle libre ou liée ? Justifier.

Solution La famille proposée est libre. Pour s'en convaincre, donnons-nous une relation de dépendance linéaire entre f, g et h :

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$$

pour certains réels α, β et γ, et montrons qu'elle est triviale. Par définition de la fonction nulle, cela signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = \alpha \sin(x^4) + \beta \sin(4x) + \gamma(\sin(x))^4 = 0.$$

Pour $x = \pi$, cette égalité devient :

$$\alpha \sin(\pi^4) + \beta \underbrace{\sin(4\pi)}_{0} + \gamma \underbrace{(\sin(\pi))^4}_{0} = \alpha \sin(\pi^4) = 0.$$

Comme π^4 n'est pas un multiple entier de π, on peut affirmer que $\sin(\pi^4) \neq 0$, et donc que $\alpha = 0$. En revenant à la relation écrite ci-dessus, on voit donc que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\beta \sin(4x) + \gamma(\sin(x))^4 = 0.$$

En prenant maintenant $x = \frac{\pi}{4}$, on obtient:

$$\beta \underbrace{\sin(\pi)}_{0} + \gamma(\sin(\tfrac{\pi}{4}))^4 = \gamma(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^4 = 0,$$

ce qui permet d'affirmer que $\gamma = 0$. En revenant à la relation écrite ci-dessus, on voit donc que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\beta \sin(4x) = 0.$$

Evaluons alors par exemple en $x = \frac{\pi}{8}$. On obtient:

$$\beta \sin(\tfrac{\pi}{2}) = \beta = 0.$$

On a donc montré que les trois coefficients intervenant dans la relation que l'on s'est donnée sont nuls. La seule relation entre f, g et h est donc la relation triviale : la famille f, g, h est libre.